Ad-soyad :

Numara : Cevap Anahtarı

Lineer Cebir II Bütünleme Sınavı Soruları **05.07.2022**

NOT : Süre 90 dakikadır. Başarılar.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

(D) $\det A \neq 0$ ise $AX = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır (4 p).

(Y) Bir kare matriste bir satır bir skalerle çarpılırsa determinant değişmez (4 p).

(Y) Herhangi iki matris birbiriyle çarpılabilir (4 p).

(D) Matris çarpımı birleşme özelliğine sahiptir (4 p).

(Y) Lineer denklem sistemleri her zaman çözülebilir (4 p).

2) A nxn tipinde bir matris olmak üzere $L : \mathbb{R}_n^n \times \mathbb{R}_n^n$ dönüşümü $L(B) = AB + BA^2$ olarak tanımlanıyor. L nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz (20 p).

3) $\begin{cases} x - 2y - z + 2t = 0 \\ -x + 2y + 2z - t = 2 \\ x + y + z + t = 4 \\ x + y + 2z + 2t = 6 \end{cases}$ lineer denklem sistemi veriliyor.

a) Sistemin çözümünü bulunuz (15 p).

b) Birbirinden farklı üç çözüm yazınız (5 p).

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & -1 & 2k-1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & k & 4 \end{bmatrix}$ olsun. A matrisinin tersinin olması için $k \in \mathbb{R}$ ne olmalıdır (20 p)?

5) Bir A matrisi için $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olarak veriliyor.

a) $\operatorname{adj} A = ?$ (A nın eki) (10 p).

b) detA=? (10 p).

2) $\forall B_1, B_2 \in \mathbb{R}^n_n$, $\forall c \in \mathbb{R}$ alalım.

$$L(B_1+B_2) = A(B_1+B_2) + (B_1+B_2)A^2 = AB_1 + AB_2 + B_1A^2 + B_2A^2 = (AB_1 + B_1A^2) + (AB_2 + B_2A^2)$$
$$= L(B_1) + L(B_2)$$

$$L(cB_1) = A(cB_1) + (cB_1)A^2 = c(AB) + c(B_1A^2) = c(AB_1 + B_1A^2) = cL(B_1)$$

$\Rightarrow L$ bir lineer dönüşümdür.

3) a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_1+S_4]{\substack{S_1+S_2 \\ -S_1+S_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3S_4+S_3]{2S_4+S_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3+S_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[S_3+S_2]{S_3+S_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-S_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_4 = u$ denilirse
$$x_1 + x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 - x_4 = 2 - u$$
$$x_2 - x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = x_4 = u$$
$$x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow x_3 = 2 - x_4 = 2 - u$$

olup sistemin çözümü

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-u \\ u \\ 2-u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}$$

şeklindedir.

b) $u=0$ için $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $u=1$ için $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u=2$ için $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $u=-1$ için $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

birer çözümdür.

4) A^{-1} vardır $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ dır.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & -1 & 2k-1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & k & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 2 & -1 & 2k-1 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -1 & 2k-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -1 & 2k-1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix}$$

(−(1. satır)+4. satır) (4. satıra göre açılım) (1. satır + 3. satır)

$$= 2(k+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(k+1)(-1+2) = 2k+2 \neq 0 \Rightarrow k \neq -1$$

(3. satıra göre açılım)

5) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$ olduğunu biliyoruz.

$\operatorname{adj} A = (\det A) A^{-1}$ ile hesaplanabilir. $\det A$ yı bulalım:

$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$ olur.

$$\det A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \det A = -1$$

$$\operatorname{adj} A = (\det A) A^{-1} = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$